

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 5.

Gasstromingen met hoge snelheden.

Voordrachten jan.-febr. 1948.

incompl.

Burgers J.M.



1948

Gasstromingen met hoge snelheden.

Door Prof. Dr. J.M. Burgers, (Delft).

Doel van deze voordrachten is enige uitgewerkte voorbeelden te geven van de behandeling van de niet-lineaire differentiaalvergelijkingen voor de ééndimensionale stroming van een ideaal gas.

1. Grondvergelijkingen. - Notatie:

u = snelheid in de x -richting, beschouwd als een functie van de tijd t en de plaats x waar het beschouwde volume-element zich ten tijde t bevindt;

ρ = dichtheid;

p = druk;

T = (absolute) temperatuur.

Het gas wordt als ideaal beschouwd, zodat

$$p = R \rho T \quad \dots (1)$$

met R = constante. In verband hiernaast is de inwendige energie van het gas per eenheid van massa:

$$U = c_v T, \quad \dots (2)$$

waarin c_v , de soortelijke warmte bij constant volume, eveneens een constante is.

De totale energie per eenheid van massa (E) is de som van de inwendige energie en de kinetische energie:

$$E = U + \frac{1}{2} u^2 \quad \dots (3)$$

Bij het eerste te behandelen probleem zal de invloed van de zwaartekracht buiten rekening worden gelaten (men kan de beweging horizontaal denken), zodat potentiële energie geen rol speelt. In een tweede voorbeeld zal een geval van expansie in een zwaarteveld met constante gradient g worden gezien.

Ondersteld wordt dat geen warmte-uitwisseling met de omgeving plaats vindt, en dat ook in het gas zelf warmtegeleiding en inwendige wrijving verwaarloosd mogen worden. Dit kan zolang nergens scherpe gradienten van T of van u optreden. Het zal evenwel blijken dat onder bepaalde omstandigheden dergelijke gradienten toch verschijnen (optreden van zg. "druksprongen" of "shock waves"); dan moet met de invloed van warmtegeleiding en viscositeit wel rekening worden gehouden. Hierop wordt later teruggekomen.

De verandering met de tijd van een grootheid, gekoppeld aan een zich met de snelheid u verplaatsend volumelement, is gegeven door:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \quad \dots (4)$$

Met behulp hiervan worden de vergelijkingen als volgt geschreven:

Continuïteitsvergelijkingen:

$$\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = - \rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots (5)$$

Dynamische vergelijkingen:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots (6)$$

Vergelijking voor de totale energie:

$$\rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} (p u) \quad \dots (7)$$

Uit (6) leidt men af de vergelijking voor de kinetische energie:

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right\} = - u \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots (8)$$

Trekt men deze van (7) af, dan volgt de thermodynamische energievergelijking:

$$\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + u \frac{\partial U}{\partial x} \right) = - p \frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots (9)$$

Met behulp van (1) en (2) volgt hieruit:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{R}{c_v} T \frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots (10)$$

waarin $R/\sigma_v = k - 1$ ($k = \sigma_p/\sigma_v =$ verhouding der soortelijke warmten; men heeft: $R = \sigma_p - \sigma_v$). Stelt men (10) naast (5), dan is $\partial u/\partial x$ te elimineren, waardoor men vindt:

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{k-1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)$$

of:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{k-1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

...(11)

Door integratie volgt dat voor elk volume-element van het gas geldt

$$T/\rho^{k-1} = \text{constante},$$

en in verband met (1)

$$\Theta = p/\rho^k = \text{constante} \quad \dots(12)$$

Men vindt dus de wet van Poisson voor isentropische toestandsverandering en van een enkel volume-element.

Wanneer alle volume-elementen oorspronkelijk eenzelfde temperatuur, druk en dichtheid hebben bezetten en door uitsluitend adiabatische en continue, dus isentropische toestandsveranderingen in hun tegenwoordige toestand zijn gekomen, is de grootheid Θ voor het gehele gas een constante (dezelfde voor alle volume-elementen). Met deze onderstelling zal voorlopig worden gerekend. Zij mag echter niet worden toegepast:

- a) als het gas niet uit een oorspronkelijk homogene toestand komt;
- b) wanneer door het verschijnen van druksprongen entropieveranderingen in bepaalde volume-elementen plaats grijpen. De behandeling van de problemen wordt derhalve voorlopig gebaseerd op de volgende vergelijkingen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x}$$

...(I)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

...(II)

$$p = \Theta \rho^k$$

...(III)

met Θ = constante voor het gehele gas.

2. Kleine storingen van een oorspronkelijk homogeen veld in rust.

Onderstel: $p = p_0 + p'$

$$\rho = \rho_0 + \rho',$$

waar p' en ρ' evenals u als kleine grootheden beschouwd mogen worden, zodat termen van hogere graad dan de eerste in deze grootheden loosd kunnen worden, terwijl p_0 en ρ_0 constanten zijn.

Uit (III) volgt:

$$p' = k \theta \rho_0^{k-1} \rho' = \frac{k p_0}{\rho_0} \rho'$$

Schrijf $k p_0 / \rho_0 = a_0^2$, dan is $p' = a_0^2 \rho'$.

(I) en (II) laten zich thans reduceren tot:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{a_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x} \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} = - \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

waaruit door eliminatie van u :

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}$$

Oplossing:

$$\begin{cases} \rho' = f(x - a_0 t) + g(x + a_0 t) \\ \rho' = a_0^2 f(x - a_0 t) + a_0^2 g(x + a_0 t) \\ u = \frac{a_0}{\rho_0} f(x - a_0 t) - \frac{a_0}{\rho_0} g(x + a_0 t) \end{cases}$$

Voortplantingsverschijnselen. Betekenis van a_0 als geluidssnelheid.

1. Bewegingen met eindige snelheden en eindige drukgradiënten.

Schrijf: $k p / \rho = a^2$

(a = geluidssnelheid in de door p en ρ gekarakteriseerde toestand, thans niet meer een constante). Met behulp van (III) volgt:

$$\begin{cases} p = (a^2/k)^{\frac{k}{k-1}} \theta^{-\frac{1}{k-1}} \\ \rho = (a^2/k)^{\frac{1}{k-1}} \theta^{-\frac{1}{k-1}} \end{cases}$$

Vergelijkingen (I) en (II) kunnen nu getransformeerd worden in de volgende:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{2a}{k-1} \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} = - \frac{k-1}{2} a \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

waaruit kan worden afgeleid:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial}{\partial x} \right\} \left(u + \frac{2a}{k-1} \right) &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial}{\partial x} \right\} \left(u - \frac{2a}{k-1} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (iv)$$

Interpretatie van deze vergelijkingen. - Karakteristieken.

4. Bizondere oplossing der vergelijkingen (IV) ter beschrijving van een eenvoudige geval van expansie.

Onderstel: u en a zijn beide uitsluitend functies van de variabele $\xi = x / t$. Men kan dan een oplossing vinden, waarvoor geldt:

$$(u - \xi)^2 = a^2$$

A) $u - \xi = +a$:

$$u = \frac{2\xi}{k+1} + C; \quad a = -\frac{k-1}{k+1} \xi + C$$

B) $u - \xi = -a$:

$$u = \frac{2\xi}{k+1} + C; \quad a = +\frac{k-1}{k+1} \xi - C$$

Betekenis dezer formules; expansie van een gaskolom; bepaling van C

(geval A): $C = \frac{2a_0}{k+1}$

waarin a_0 = geluidssnelheid in het oorspronkelijke ongeëxpandeerde gas.

Front van de expansie en naar binnen lopend golf-front.

Baan van een volume-element van het gas (oplossing A):

$$\frac{dx}{dt} = u = \frac{2}{k+1} \frac{x}{t} + \frac{2a_0}{k+1}$$

Integraal:

$$x = \frac{2a_0}{k-1} t + Ct^{\frac{2}{k+1}}$$

C te bepalen door de aanvangsvoorwaarde: $x_0 = -s$ voor $t_0 = s/a_0$

Hiermede wordt:

$$x = \frac{2a_0}{k-1} t - \frac{k+1}{k-1} s \left(\frac{a_0 t}{s} \right)^{\frac{2}{k+1}}$$

Snelheid en versnelling van een volume-element. Berekening van de

druk. Toepassing van het resultaat op een geval waarbij het gas een

lichaam met een zekere massa voortdrijft.

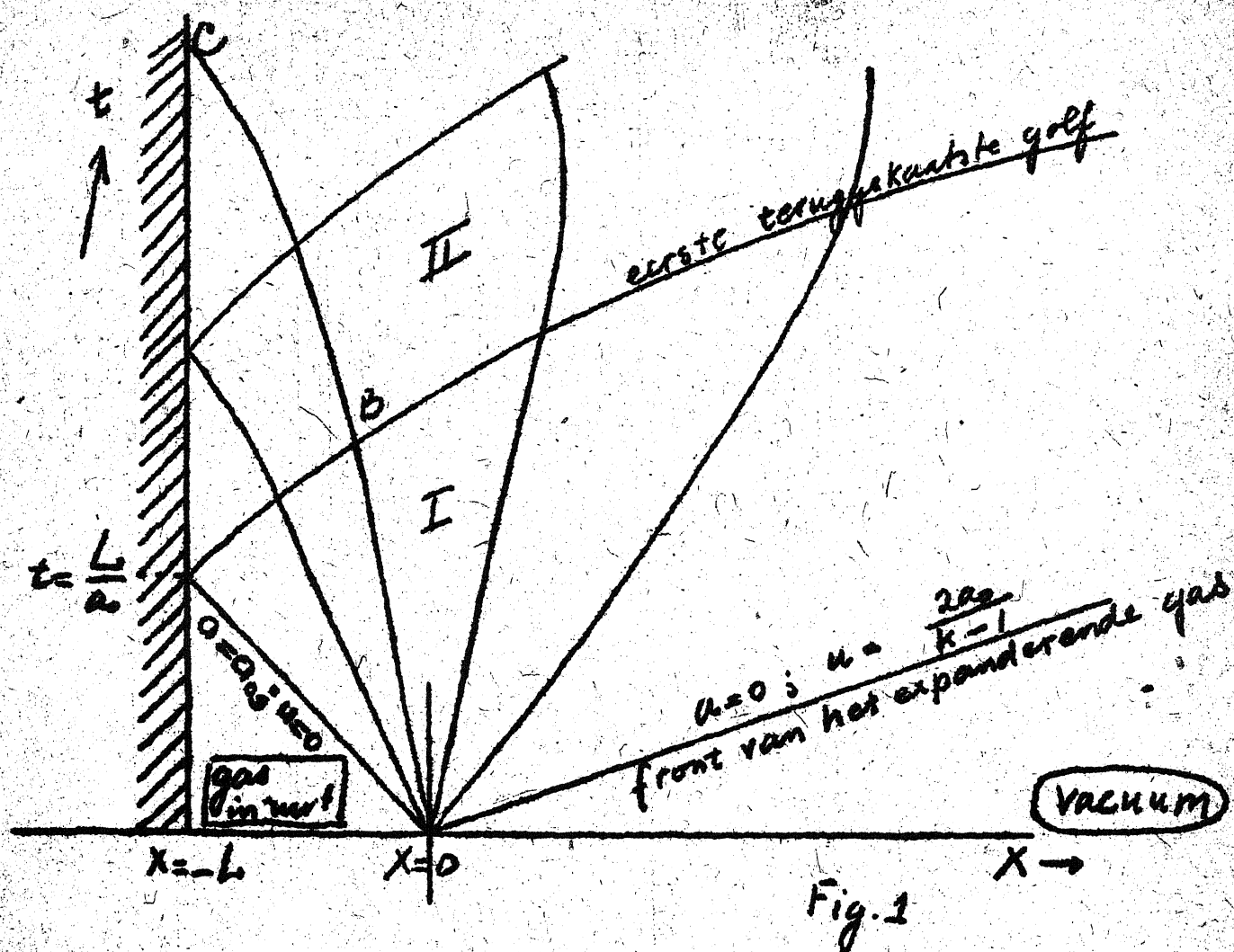
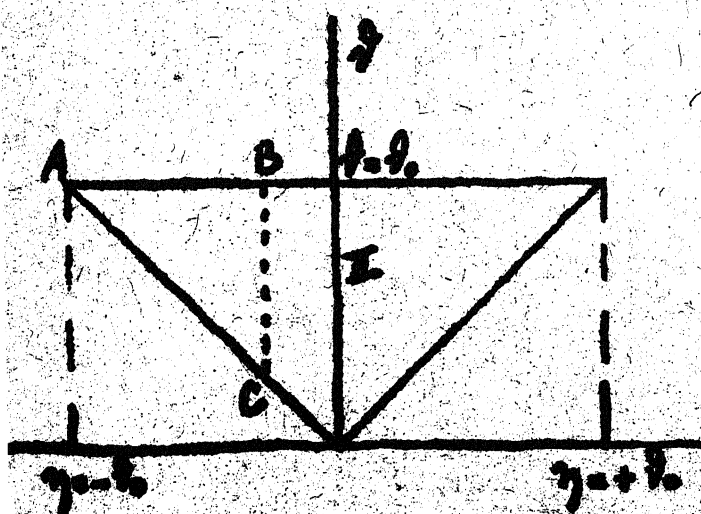


Fig. 1



5. Terugkaatsing van expansiegolven door een vaste wand.

Voor het van $x = 0$, $t = 0$ uitgaande systeem van expansiegolven (geeft in de figuur 1) geldt:

$$u = \frac{2}{k+1} \frac{x}{t} + \frac{2a_0}{k+1} \quad ; \quad a = -\frac{k-1}{k+1} \frac{x}{t} + \frac{a_0}{k+1}$$

De eerste naar links gaande expansiegolf ($a = a_0$; $u = 0$) bereikt de wand in $x = -L$ ten tijde $t = L/a_0$. Naar voor de eerste teruggekaatste golf:

$$\frac{dx}{dt} = u + a = \frac{3-k}{k+1} \frac{x}{t} + \frac{4a_0}{k+1}$$

waaruit:

$$x = \frac{2a_0}{k-1} t - \frac{k+1}{k-1} L \left(\frac{a_0 t}{L} \right)^{\frac{3-k}{k+1}}$$

In gebied II zijn teruggekaatste golven op de oorspronkelijke golf gesuperponeerd. Stel:

$$\theta = u + \frac{2a}{k-1} \quad , \quad \eta = u - \frac{2a}{k-1}$$

Systeem (IV) gaat over in:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

Hieruit volgt:

$$\frac{dx}{dt} = u + a \quad \text{voor een lijn } \theta = \text{constante}$$

$$\frac{dx}{dt} = u - a \quad \text{voor een lijn } \eta = \text{constante}$$

Langs de oorspronkelijke golven in gebied I en evenzeer langs de voortzetting hiervan in II geldt:

$$\frac{dx}{dt} = u - a, \text{ dus } \eta = \text{constante};$$

terwijl langs elke gereflecteerde golf geldt

$$\frac{dx}{dt} = u + a, \text{ dus } \theta = \text{constante}.$$

In het bijzonder heeft men langs de eerste gereflecteerde golf:

$$\theta = \theta_0 = \frac{2a_0}{k+1} \quad \eta = \frac{t}{k+1} \quad \frac{z}{c} = \frac{b - 2k}{k+1} a_0$$

waarbij η loopt van $-\frac{2a_0}{k+1}$ tot $+\frac{2a_0}{k+1}$.

Neem nu θ en η als onafhankelijke variabelen en x en t als afhankelijk daarvan; dan is:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \eta} &= (k+1) \frac{\partial t}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= (k-1) \frac{\partial t}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \dots (V)$$

Dit systeem is lineair in z en t .

Eliminatie van x geeft:

$$\frac{\partial t}{\partial \eta} - \frac{n}{\eta - \theta} \left(\frac{\partial t}{\partial \eta} - \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) = 0 \dots (VI)$$

Met $n = \frac{k+1}{2(k-1)}$. Men schrijft $\frac{n}{\eta - \theta} = m$.

Invoorwaarden:

Stel $\theta = \theta_0$: $\eta = \frac{2a_0}{k-1} \left\{ 1 - 2 \left(\frac{L}{a_0 + t} \right)^{\frac{2(k-1)}{k+1}} \right\}$

waaruit

$$\frac{d\eta}{d\theta} = \left(\frac{2\theta_0}{\theta_0 - \eta} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \dots (a)$$

Wanneer $x = \dots 1$ is $\eta = 0$; dus $\theta = -\eta$ en $d\theta = -d\eta$. Voorts

hier: $dx = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) d\theta = 0$

waaruit:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad \text{en dus} \quad \frac{\partial t}{\partial \theta} = -\frac{\partial t}{\partial \eta} \dots (b)$$

Integratie-methode van Riemann. Zij v een functie van θ en η , dan

$$\int d\eta d\theta v(t\eta\theta - m\eta + m\eta_0) = \int \{v(t\theta_0 - m\eta) d\theta + t(v_\eta - m v) d\eta\} + \iint d\eta d\theta \{v_{\eta\theta} + (m v)_\eta - (m v)_\theta\}$$

is $t\eta\theta - m\eta + m\eta_0 = 0$ (volgens VI)

Die tevens: $v_\theta + m r / \eta = (v_\eta / \theta) = 0$

dan is

$$\int_0^t \{ v(t_0 - m t / d\theta + t(v_\eta - m t / d\eta) \} = 0 \quad \dots (VII)$$

Berekening van t langs A C.

Zet (VII) toe op A C B in fig. 2, en leg nog aan v de voorwaarden op:

$$v_\theta + m r = 0 \quad \text{langs B C}$$

$$v_\theta + v_\eta = 0 \quad \text{langs A C.}$$

Daaraan voldoet voor $k = 5/3$, $n = 2$:

dan is:

$$t_k = 2(v_\theta^2/B - v_\eta^2/A) - 2 \int_0^t dy \cdot t(v_\eta - m r)$$

waarmede gevonden wordt:

$$t_c = -L \frac{3\eta_B^2 - 3\eta_A^2}{2\eta_B^3}$$

Berekening van t voor punten binnen de driehoek.

Zet (VII) toe op C D P (fig. 3) en zoek een nieuwe v -functie, welke voldoet aan:

$$\begin{cases} v_\theta + m r = 0 & \text{langs P D} \\ v_\eta - m r = 0 & \text{langs P C.} \end{cases}$$

Daaraan voldoet:

$$v = (\eta - \theta)^2 \left\{ 1 - 2 \frac{(\eta - \eta_p)(\theta - \theta_p)}{(\eta - \theta)(\eta_p - \theta_p)} \right\}$$

dan is:

$$v(t)_p = \frac{1}{2}(v_t)_c + \frac{1}{2}(v_t)_D - \frac{1}{2} \int_0^D dy \cdot t(v_\eta + v_\theta)$$

waarmede gevonden wordt

$$t_p = 12L \frac{\eta_p \theta_p - 9a_0^2}{(\eta_p - \theta_p)^3}$$

Dit resultaat blijft zijn betekenis behouden wanneer $\eta_p > 0$ wordt, zodat de gehele driehoek geldt:

$$t = 12L \frac{\eta \theta - 9a_0^2}{(\eta - \theta)^3}$$

9. Eigenschappen van de partiele differentiaalvergelijking voor v :

$$w_{\eta\theta} + (m v / \eta - (m v) / \theta = 0 \quad \dots (A)$$

waar $m = n / (\eta - \theta)$ (n : getal).

Stel $v = (\eta - \theta) / w$. De vergelijking gaat over in:

$$(\eta - \theta) / w_{\eta\theta} + (n-1) w_{\eta} - (n-1) w_{\theta} = 0 \quad \dots (B)$$

a). Beschouw nu eerst de vergelijking

$$(\eta - \theta) / w_{\eta\theta} - \mu w_{\eta} + \nu w_{\theta} = 0 \quad \dots (C)$$

Differentieer deze resp. naar η en naar θ :

$$(\eta - \theta) / w_{\eta\eta\theta} - \mu w_{\eta\eta} + (\nu+1) w_{\eta\theta} = 0 \quad \dots (D_1)$$

$$(\eta - \theta) / w_{\eta\theta\theta} - (\mu+1) w_{\eta\theta} + \nu w_{\theta\theta} = 0 \quad \dots (D_2)$$

Men verkrijgt dus voor w_{η} , resp. voor w_{θ} een vergelijking van hogere rang.

b). Neem thans $\mu = \nu = 1$.

$$(\eta - \theta) / w_{\eta\theta} - w_{\eta} + w_{\theta} = [(\eta - \theta) / W]_{\eta\theta} = 0 \quad \dots (E)$$

Oplossing: $(\eta - \theta) / W = H(\eta) - \Theta(\theta)$

Hieruit volgt als oplossing van (C), indien μ en ν geheel zijn:

$$w = \frac{\partial^{\mu+\nu-2}}{\partial \eta^{\nu-1} \partial \theta^{\mu-1}} W = \frac{\partial^{\mu+\nu-2}}{\partial \eta^{\nu-1} \partial \theta^{\mu-1}} \left(\frac{H - \Theta}{\eta - \theta} \right)$$

c). Onderstel dat de functie \bar{w} voldoet aan:

$$(\eta - \theta) \bar{w}_{\eta\theta} - (\mu+1) \bar{w}_{\eta} + (\nu+1) \bar{w}_{\theta} = 0$$

Dan voldoet

$$\bar{w} = (\eta - \theta) / \mu + \nu + 1 \bar{w}$$

aan:

$$(\eta - \theta) / \bar{w}_{\eta\theta} + \nu \bar{w}_{\eta} - \mu \bar{w}_{\theta} = 0 \quad \dots (F)$$

Indien weer μ en ν geheel zijn, is de oplossing hiervan dus:

$$\bar{w} = (\eta - \theta) / \mu + \nu + 1 \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial \eta^{\nu} \partial \theta^{\mu}} \left(\frac{H - \Theta}{\eta - \theta} \right)$$

d) is n geheel, dan is de oplossing van (A):

dus voor $n = 2$ ($k = 5/3$)

en voor $n = 3$ ($k = 7/5$)

Andere methode van behandeling Stel in (A):

Dan gaat (A) over in:

Een bijzondere oplossing hiervan wordt verkregen door te stellen:

$V = 4(\eta)$ waar

Men vindt dan

waarvan een oplossing is:

Voor

10. De druk tegen de wand $x = -L$ kan gevonden worden door op te merken dat de formules in het begin van par. 3 (bl. 4) p en ρ in η uitdrukken. Anderzijds is langs de wand $x = -L$, waar $k = 0$:

$$\theta = -\eta; \text{ en } a = \frac{b-\eta}{b} = \frac{2}{3} = -\frac{\eta}{3}$$

het verband tussen t en η gevonden is, kan men voor elke waarde ook p berekenen.

11. Expansie wanneer zich rechts van $x = 0$ geen vacuum bevindt, doch een in rust zijnd homogeen gas met een lagere druk dan links van $x = 0$.

In dit geval zal rechts een compressiegolf verschijnen. Deze neemt de vorm aan van een discontinue golf ("shock wave"), welke met een snelheid ξ (groter dan de geluidssnelheid in het ongestoorde gas) voortloopt. Het discontinue golffront scheidt twee toestanden p, ρ, u (links van het front) en p_1, ρ_1, u_1 (rechts ervan) met de snelheid 0. Hier-tussen bestaat het verband:

$$\begin{aligned} p(\xi - u) &= p_1 \xi \\ p + \rho(\xi - u)^2 &= p_1 + \rho_1 \xi^2 \\ \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{(\xi - u)^2}{2} &= \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{\xi^2}{2} \end{aligned}$$

waaruit volgt:

$$\xi = \frac{k+1}{2} u + \sqrt{a_1^2 + \frac{(k+1)^2}{16} u^2}$$

$$p = p_1 + \rho_1 u \xi$$

Aansluiting bij het expansiegebied.

12. Expansie van een verticale gaskolom waar...

De bewegingsvergelijking (II) van par. 1, blz. (3) moet worden aangevuld met de zwaartekracht en krijgt de vorm:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad \dots (IIa)$$

waar thans z is geschreven in de plaats van x . Het stelsel (IV) van blz. 4 gaat over in:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial}{\partial z} \right\} \left(u \pm \frac{2a}{k-1} \right) = -g \quad \dots (IVa)$$

(a) Oplossing voor een gaskolom in rust.

(b) Transformatie. Stel

$$\tau = t; \quad \xi = z + \frac{1}{2} g t^2; \quad w = u + g t$$

Dan gaan de vergelijkingen (IVa) over in:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} + (w \pm a) \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} \left(w \pm \frac{2a}{k-1} \right) = 0.$$

Hierop kan weer de transformatie worden toegepast, gegeven in par. 5 en 6 (blz. 6 en 7), tot en met vergelijking (VI); deze luidt thans:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \eta \partial \theta} - \frac{2}{\eta - \theta} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \eta} - \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right) = 0$$

13. Randvoorwaarden (geval $k = 5/3$; voorts is geschreven $a_0 = \frac{\alpha}{3}$).

A. Grenslijn tegen het gas in rust (fig. 4):

$$a = \sqrt{a_0^2 - \frac{2}{3} g z} = a_0 + \frac{1}{3} g t = \frac{1}{3} (\alpha + g t); \quad x = -\frac{1}{3} \alpha t - \frac{1}{6} g t^2$$

$$u = 0; \quad w = g t; \quad \theta = \alpha + 2 g t; \quad \eta = -\alpha$$

B. Begin der beweging: $w = u = \frac{3}{4} \frac{z}{t} + \frac{1}{4} \alpha; \quad a = -\frac{1}{4} \frac{z}{t} + \frac{1}{4} \alpha$

$$\theta = \alpha; \quad \eta = \frac{3}{2} \frac{z}{t} - \frac{1}{2} \alpha$$

$\frac{z}{t}$ loopt van $-\frac{\alpha}{3}$ ($a = \frac{\alpha}{3} = a_0$)

tot $+\alpha$ ($a = 0$); η loopt van $-\alpha$ tot $+\alpha$.

Loop van de grenslijnen in een η, θ -vlak (zie fig. 5).

14. Oplossing der vergelijking.

Hulpfunctie:

$$v = (\theta - \eta)^2 - \frac{2(\theta - \eta)(\theta - \theta_p)(\eta - \eta_p)}{\theta_p - \eta_p}$$

Met behulp van de randvoorwaarden wordt gevonden:

$$\tau = \frac{\theta^2 - \alpha^2}{g(\theta - \eta)^2} \left\{ \theta - \frac{\theta^2 - \alpha^2}{2(\theta - \eta)} \right\}$$

en vervolgens:

$$\zeta = \frac{\theta^2 - \alpha^2}{g(\theta - \eta)} \left\{ \frac{5\theta^2 - \alpha^2}{4(\theta - \eta)} - \frac{\theta(\theta^2 - \alpha^2)}{2(\theta - \eta)^2} - \frac{2\theta}{3} \right\}$$

15. Beweging van een volume-element.

Men heeft voor een volume-element van het gas:

$$\frac{dz}{dt} = u = \frac{\theta + \eta}{2} - gt = \frac{(\alpha^2 - \eta^2)/(\alpha^2 - 2\theta\eta + \eta^2)}{2(\theta - \eta)^3}$$

Voorts is:

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = w = \frac{\theta + \eta}{2} = \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\eta}}{\frac{\partial \tau}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\eta}},$$

waar $\frac{d\theta}{d\eta}$ betrekking heeft op de afbeelding van een stroombaan in het η, θ -vlak. Hieruit wordt verkregen:

$$\frac{d\theta}{d\eta} = \frac{\theta^4 - 4\theta^3\eta + 2\theta^2\alpha^2 + 4\theta\eta\alpha^2 - 3\alpha^4}{\theta^4 - 4\theta^3\eta + 6\theta^2\eta^2 - 4\theta\eta\alpha^2 - 2\alpha^2\eta^2 + 3\alpha^4},$$

waaruit door integratie volgt:

$$\frac{1}{5} \theta^5 - \theta^4\eta + 2\theta^3\eta^2 - 2\theta^2\eta\alpha^2 + \theta(3\alpha^4 - 2\eta^2\alpha^2) + 3\eta\alpha^4 = \text{constante}.$$

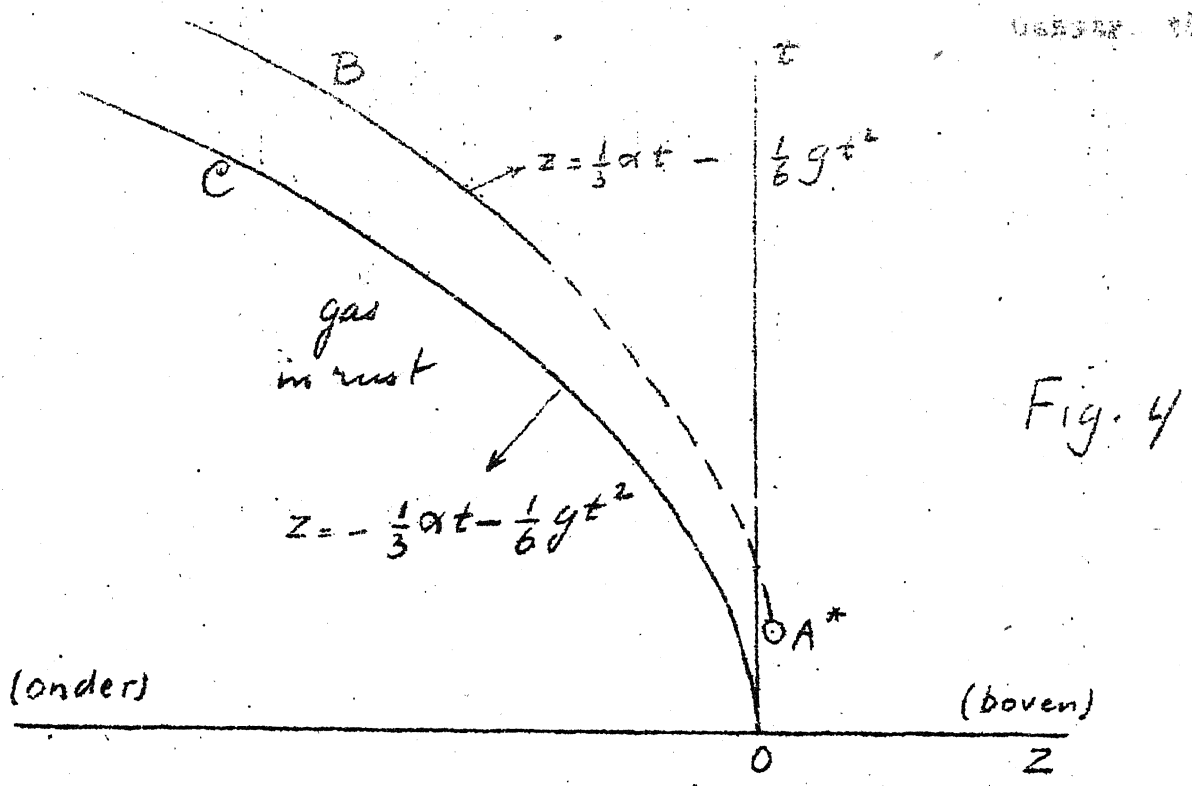


Fig. 4

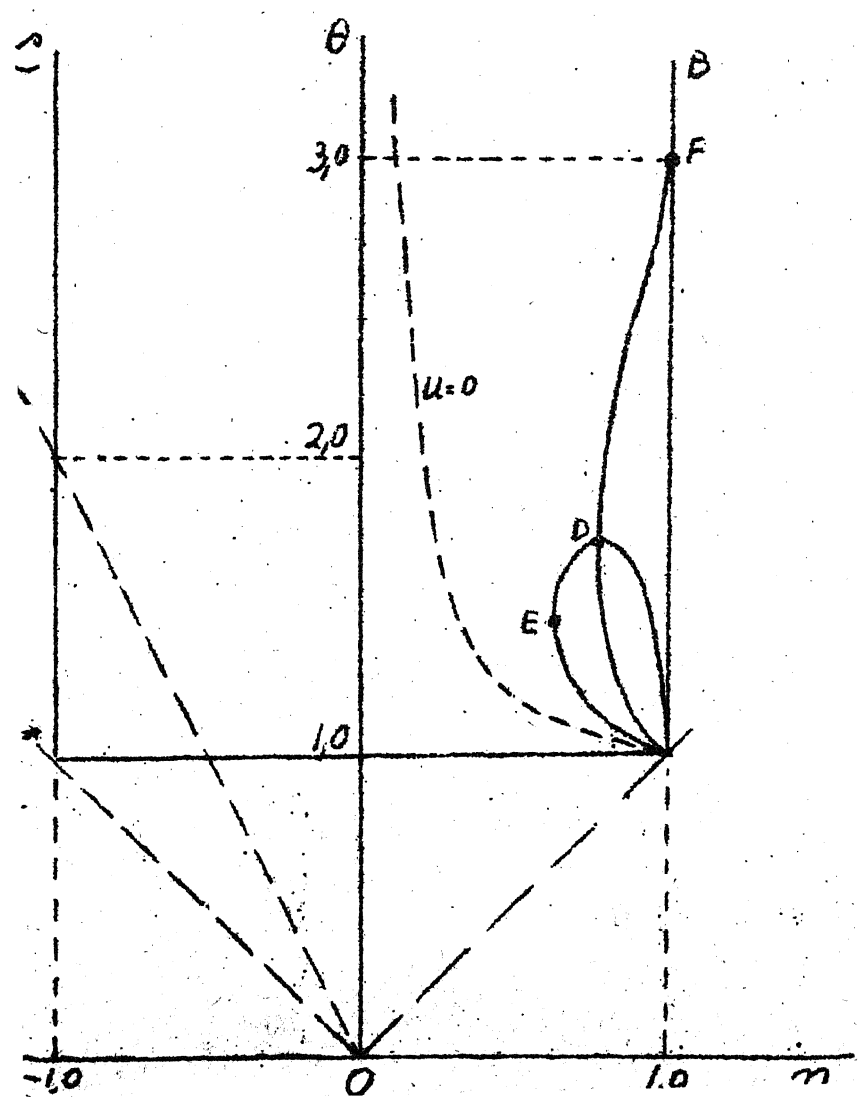
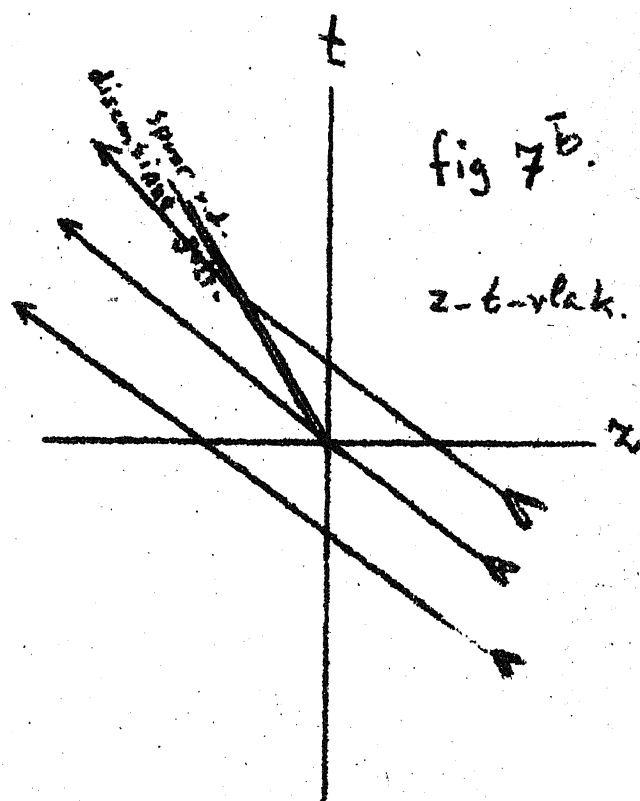
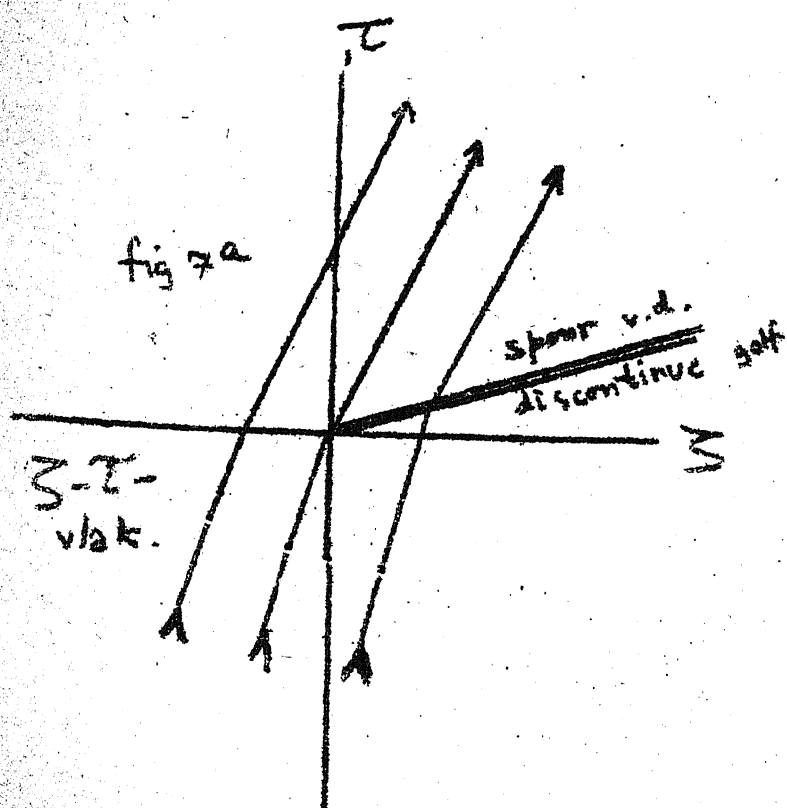
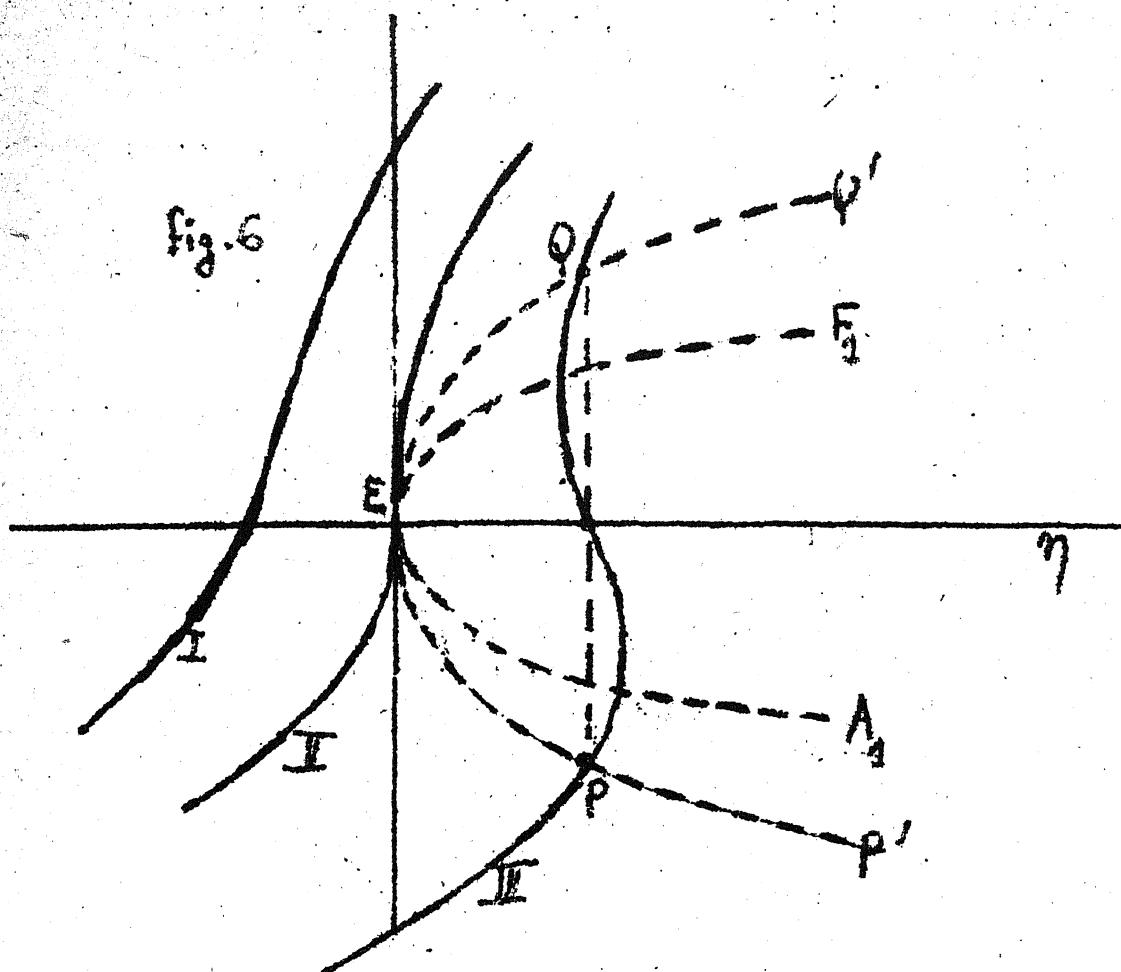


Fig. 5



memo



aan/to :

van/from:

af/sect:

datum/date:

Hoofdstuk 15
(p 1-8)
(onbreekt)

16. De formules verkregen voor τ en ξ als functies van θ en η , tezamen met de formule voor de afbeelding der stroombanen in het η, θ -vlak en de formule voor u maken het mogelijk tot een voorlopige beschrijving te komen van de beweging van het gas bij grote τ . Het is echter niet zeker of deze beschrijving een juist beeld van deze beweging geeft, aangezien een nadere beschouwing der formules toont, dat in de aanvangsstadia zekere singulariteiten optreden.

Men vindt door differentiatie:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \eta} = \frac{\theta^4 - 4\theta^3\eta + 2\theta^2\alpha^2 + 4\theta\eta\alpha^2 - 3\alpha^4}{2\eta(\theta - \eta)^4}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta} = \frac{\theta^4 - 4\theta^3\eta + 6\theta^2\eta^2 - 4\theta\eta\alpha^2 - 2\eta^2\alpha^2 + 3\alpha^4}{2\eta(\theta - \eta)^4}$$

terwijl

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta} = (w + a) \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \quad ; \quad \frac{\partial \xi}{\partial \theta} = (w - a) \frac{\partial \tau}{\partial \theta}$$

Hieruit volgt, dat $\frac{\partial \tau}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \xi}{\partial \eta}$ en eveneens $\frac{\partial \theta}{\partial \eta}$, behalve voor $\theta = \alpha$, ook nog nul worden in de punten van de kromme:

$$\eta = (\theta^2 + 3\alpha^2) / 4\theta$$

(kromme ADF in het η, θ -vlak; zie fig. 5).

Voorts worden $\frac{\partial \tau}{\partial \theta}$ en $\frac{\partial \xi}{\partial \theta}$ nul (waarbij $\frac{\partial \theta}{\partial \eta}$ oneindig wordt) in de punten van kromme:

$$(6\theta^2 - 2\alpha^2)\eta^2 - 4(\theta^3 + \theta\alpha^2)/\eta + \theta^4 + 3\alpha^4 = 0$$

(Kromme AEDA in het η, θ -vlak).

Coördinaten van D :

$$\theta = \sqrt{3} \cdot \alpha \quad ; \quad \eta = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \alpha \quad ; \quad \tau = \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{\alpha}{g} \quad ; \quad \xi = \frac{4}{3} \frac{\alpha^2}{g}$$

Coördinaten van E:

$$\theta = \sqrt{2} \cdot \alpha ; \quad \eta = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \alpha ; \quad \tau = \sqrt{2} \cdot \frac{\alpha}{g} ; \quad \zeta = \frac{1}{6} \frac{\alpha^2}{g}$$

Het nul worden van $\frac{\partial \tau}{\partial \theta}$ en $\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}$ betekent dat in het ζ, τ -vlak de karakteristieken $\eta = \text{constante}$ en de stroombaan een keerpunt vertonen. Dit is fysisch niet mogelijk. In de werkelijke beweging moet dan een discontinue overgang optreden.

17. Men kan dit toelichten door gebruik te maken van reeksontwikkelingen, geldig in de naaste omgeving van het punt E, waar dit verschijnsel het eerste optreedt. Stelt men ter vereenvoudiging $\alpha = 1, g = 1$, dan zijn de begintermen dezer reeksen ($\eta, \theta, \zeta, \tau$ alle gesteld van af E):

$$f = \eta - \theta^3 + 2\sqrt{2} \theta \eta \dots$$

$$\tau = 2\eta + 2\theta^3 - 4\sqrt{2} \theta \eta \dots$$

$$\zeta = \frac{5}{3} \sqrt{2} \cdot \eta + \frac{4}{3} \sqrt{2} \theta^3 - \frac{16}{3} \theta \eta \dots$$

De eerste vergelijking geeft met $f = \text{constante}$ de "stroombanen" (f is nul voor de door E gaande baan.).

In de (niet op schaal getekende) fig. 6 stellen de lijnen I, II, III drie "stroombanen" voor, resp. voor $f < 0; f = 0; f > 0$. De kromme AEF bepaald door $\eta = \frac{3\sqrt{2}}{4} \theta^2$ geeft de punten waar $\frac{\partial \tau}{\partial \theta}$ en $\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}$ nul worden ($\frac{d\theta}{d\eta}$ langs de stroombaan genomen, wordt hier oneindig).

Elimineert men uit de bovenstaande vergelijkingen θ , dan wordt verkregen:

$$\tau = 4\eta - 2f \dots$$

$$\zeta = 3\sqrt{2} \cdot \eta - \frac{4}{3} \sqrt{2} f \dots$$

(steeds met een beperkte graad van benadering, zoals overeenkomt met de weinige termen gebezigd in bovenstaande reeksen).

Men kan hieruit afleiden dat wanneer men een "stroombaan" volgt met een positieve f , zoals III, de baan in het ζ, τ -vlak een bepaald segment $3x$

doorloopt (heen, terug, weer heen).

Om dit te vermijden moet men in het η, θ -vlak een sprong maken van het punt P naar Q (Op de parabool $\eta = \frac{V^2}{4} \theta^2$ gelegen). De sprong in Q veroorzaakt geen sprong in τ en ξ , doch wel in w en c en bepaalt het optreden van een discontinue golf in de werkelijke beweging.

Het verloop van de stroombanen in het ξ, τ -vlak, resp. in het x, t -vlak is schematisch aangegeven in fig. 7a, 7b. Hier is rekening gehouden met de sprong in w , welke in bovenstaande benaderingsformules voor τ en ξ nog niet tot uiting komt.